

# Matemática e Engenharia

## *Teoria e Aplicações*

Escola Politécnica – UFRJ

*Prof. Severino Fonseca da Silva Neto, D.Sc.*

Departamento de Engenharia Naval e Oceânica

<http://severinoufrj.blogspot.com>

severino@poli.ufrj.br

# JUSTIFICATIVA

- Objetivo
- Ser Humano
- Meio Ambiente
- Sistema de Engenharia
- Aplicações na Física-Matemática
- Mecânica
- Eletricidade e Magnetismo
- Termometria e Transmissão de Calor

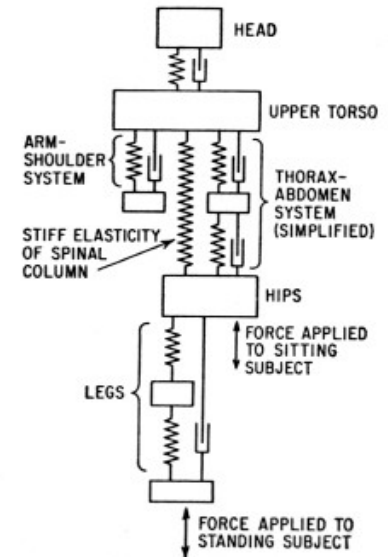
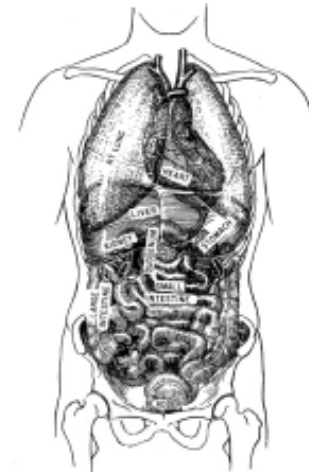
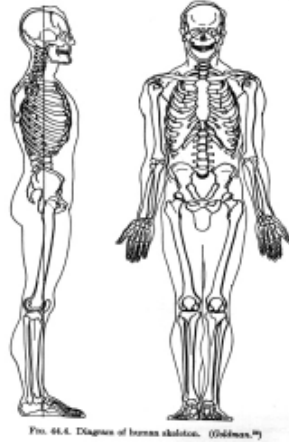


Fig. 44.7. Simplified mechanical system representing the human body—standing on a vertically vibrating platform at low frequencies. (After Coermann et al.<sup>29</sup>)



# Ex.: Eng. Naval, Civil, Mecânica, Materiais, Ambiental e Petróleo

## > FÍSICA

Comportamento Mecânico/  
Térmico de:

Materials  
Sólidos  
Fluidos

### • Análises:

- Estática/ Dinâmica
- Linear/ não Linear

## > MATEMÁTICA

Modelação da geometria/  
propriedades dos materiais

### • Análise Estática

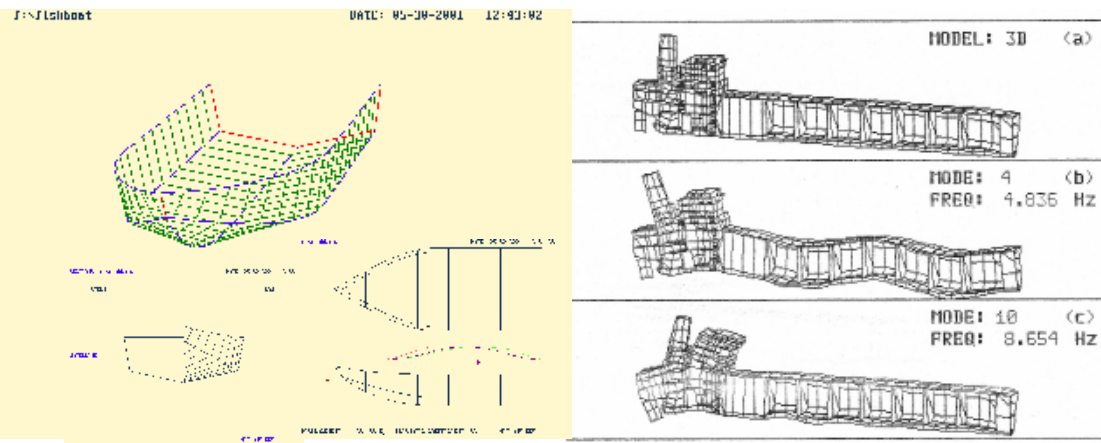
- Linear
- Não Linear

### • Análise Dinâmica

- Vibração Livre
- Vibração Transiente
- Vibração Harmônica

### • Análise Térmica

- Dilatação
- Transferência do calor



# Conceitos Básicos

- Álgebra Linear (geometria)

- Vetores
- Matrizes
- Transformações Lineares
- Autovalores e Autovetores

- Cálculo Numérico

- Sistemas de Equações
- Raízes (Newton-Raphson)
- Diferenças Finitas
- Elementos Finitos
- Transformada de Fourier

- Cálculo Diferencial e Integral

- Derivadas
- Integrais
- Séries Infinitas
- Equações Diferenciais Ordinárias
- Equações Diferenciais Parciais

ÁLGEBRA VETORIAL E GEOMETRIA EM  $\mathbb{R}^2$  E  $\mathbb{R}^3$

Exemplo:  
 $U = [x_1, x_2, x_3]$  se e só se  $-U = [-x_1, -x_2, -x_3]$ .

Fig. 2.6 ilustra estes fatos geométricos.

Vejamos em seguida como as operações de soma de vetores geométricos e de cálculo do módulo escalar de um vetor geométrico se traduzem nos vetores de coordenadas. Essa transcrição é fundamental para tornar algébricas as operações geométricas.

Considere dois vetores  $U = [u_1, u_2, u_3]$  e  $V = [v_1, v_2, v_3]$ . Dado um ponto arbitrário  $A$  do espaço, seja  $AB$  a seta representativa de  $U$  e  $AC$  a representativa de  $V$ . A seta  $BC$  é então a representativa de  $U+V=W$  (Fig. 2.7). Seja  $W = [w_1, w_2, w_3]$ .

Fig. 2.7

As componentes do vetor  $W$  podem ser determinadas simplesmente a partir das de  $U$  e  $V$ . Seja  $[x_1, x_2, x_3]$  as coordenadas de  $A$ ,  $[y_1, y_2, y_3]$  as de  $B$  e  $[z_1, z_2, z_3]$  as de  $C$ . Então, para  $i = 1, 2, 3$  temos as fórmulas:

$$w_i = y_i - x_i = (y_i - x_i) - 0 = y_i - x_i = v_i - u_i$$

Como  $w_i = (y_i - x_i) + (z_i - y_i)$  temos:

$$w_i = y_i - x_i + z_i - y_i = z_i - x_i = v_i + u_i$$

Transformação Linear 163

8.4.6 Teorema. Sejam  $T_1, T_2 \in W$  e  $T_3 \in W$  transformações lineares e  $u, v$  e bases de  $V, W$  e  $U$  respectivamente. Então a composta de  $T_1$  com  $T_2$ ,  $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ T_1$ , é linear e

$$[T_3 \circ T_1]_{\beta}^{\alpha} = [T_3]_{\beta}^{\gamma} \cdot [T_1]_{\alpha}^{\beta}$$

Figura 8.4.6

A demonstração deste teorema é feita em bastante trabalho. Por isso não são a faremos aqui, indicando apenas sua ideia. Podemos eliminá-la simplesmente verificando a consistência das notações das transformações  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , obtendo desta forma suas ações sobre as bases respectivas. A seguir, por composição achamos o que  $T_3 \circ T_1$  faz na base de  $V$ , e chegamos então à matriz  $[T_3 \circ T_1]_{\beta}^{\alpha}$ , observando que esta é o produto da matriz anterior.

8.4.7 Exemplo

Exemplo 7. Considere uma expansão de plano  $W^2$  dada por  $T(x, y) = 2x - y$  e um cisalhamento dado por  $T_2(x, y) = x + 2y, y$ . Ao efetuarmos primeiro a expansão e depois o cisalhamento, temos a seguinte

Figura 8.4.7

# Disciplinas

- Álgebra Linear
- Cálculo I a IV
- Programação de Computadores I e II
- Probabilidade e Estatística
- Cálculo Numérico

# Álgebra Linear - importância

- Importante papel em matemática e ciência aplicada desde o final do século XIX
- Destaque após 1960, com o surgimento da tecnologia dos computadores digitais
- Permite solução de problemas geométricos através de procedimentos algébricos
- Traduz questões algébricas em linguagem geométrica
- Aplicação a teoria da vibração, cinética, química, flambagem, etc.

# Álgebra Linear - estratégia

- Disciplina de nivelamento em matemática
  - Números reais > vetores
  - Álgebra < > Geometria
  - Informática > Métodos Numéricos
  - Mecânica racional (vetorial)
  
- Orientação acadêmica em matemática
  - Ferramentas do cálculo
  - Aplicação à física

# Álgebra Linear - Tópicos

- Álgebra vetorial e geometria em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$
- Sistemas de equações lineares e matrizes
- Espaços vetoriais
- Transformações lineares
- Autovalores e autovetores



# Aplicações em Navios

- Vetores > Navio/ Rebocador
- Geometria (retas e planos no espaço):
  - Ruído gerado por máquinas ☐ Efeito no passadiço
- Sistemas Lineares e Matrizes:
  - Reações em mancais do eixo propulsor
- Espaços Vetoriais:
  - Deformação de pilares das plataformas dos MCAs
- Transformações Lineares
  - Iceberg e entrada de dique (3D - 2 telas planas)

# Vetores geométricos e vetores de coordenadas

Exemplo:

Navio / Rebocador

# VETORES GEOMÉTRICOS

## CAPÍTULO 1

### Algebra vetorial e geometria em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

#### 1. VETORES GEOMÉTRICOS

Em Física, uma grandeza que possui tanto uma medida ou magnitude quanto uma direção e um sentido sobre esta direção é chamada de *vetor*. Este é o caso, por exemplo, de grandezas físicas tais como forças, deslocamentos, velocidades e acelerações. Usualmente, uma tal grandeza é representada por uma seta.

Por exemplo, um deslocamento em um plano ao longo de um caminho em linha reta de um ponto A até um ponto B pode ser representado por uma seta (fig. 1-1). Imaginemos agora que a tal deslocamento segue-se um outro análogo, do ponto B ao ponto C. Evidentemente, o resultado será um deslocamento de A até C (fig. 1-2).

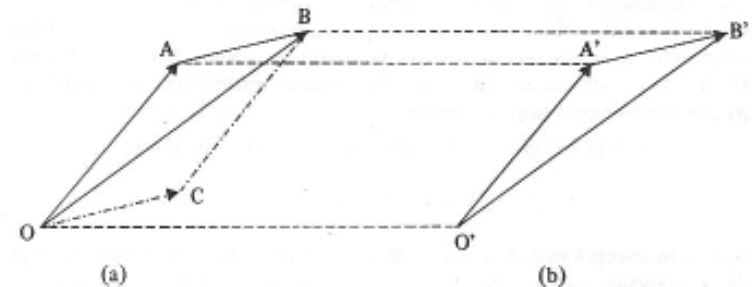


Fig. 1.5

Três vetores U, V e W são ditos *coplanares* se seus representantes, de origens coincidentes, são setas sobre um mesmo plano. O vetor zero juntamente com dois outros vetores quaisquer, forma um sistema de três vetores coplanares.

Dois vetores U e V serão ditos de *mesmo sentido* (ou de sentidos opostos) se representantes  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{EF}$  de U e V respectivamente possuem o mesmo sentido (ou sentidos opostos).

Como é dado ver ao leitor, vetores herdam propriedades de seus representantes, ou seja, estes determinam o comportamento daqueles. Interessa-nos agora definir regras que nos permitam combinar vetores de modo a produzir novos vetores fazendo uso desse princípio.

**Definição:** Dado um par de vetores U, V, se construirmos um representante  $\overrightarrow{OA}$  de U e o representante  $\overrightarrow{AB}$  de V, a seta  $\overrightarrow{OB}$  determina, qualquer que seja a origem O, um único vetor W denominado *soma dos vetores* U e V. Escrevemos nesse caso  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$  e  $W = U + V$ . (fig. 1-5 (a))

A unicidade do resultado da operação de adição de dois vetores decorre de equivalências lógicas ao considerarmos a mesma construção a partir de uma nova origem  $O'$  (fig. 1-5 (b)). Tem-se

$$\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'} \leftrightarrow \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{AA'}$$

e

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'}$$

pela propriedade dos lados de um paralelogramo combinado com a definição de setas no mesmo sentido. A transitividade da relação de equipolência nos permite concluir então que  $\overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{BB'}$  e portanto, fazendo uso do raciocínio anterior, que  $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$  ficando assim definido um único vetor W soma de U e V.

# VETORES DE COORDENADAS

## 2. VETORES DE COORDENADAS

Vamos discutir nesta seção as correspondências fundamentais existentes entre objetos geométricos e algébricos, nas quais se baseia a Geometria Analítica. Tais correspondências tornam possível resolver problemas geométricos através de procedimentos algébricos, bem como traduzir questões algébricas em linguagem geométrica.

Do ponto de vista elementar, três casos diferentes podem ser distinguidos: geometria na reta, em um plano e em todo o espaço. Correspondentes a essas geometrias tem-se a álgebra dos números reais, a dos pares desses números e a dos ternos de números. Tais correspondências dão margem à generalização algébrica do conceito de vetor.

Simbolizaremos por  $\mathbb{R}^1$  ou por  $\mathbb{R}$  o conjunto de números reais munido das operações de soma e produto desses números. O conjunto dos pares ordenados de números reais é o produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que escrevemos como  $\mathbb{R}^2$ . Por  $\mathbb{R}^3$  denotaremos o conjunto dos ternos ordenados de números reais.

Sabemos que um número real  $x_1$  pode ser usado para representar um ponto  $P_1$  em uma reta orientada desde que, nessa reta, estejam distinguidos um ponto  $O$ , chamado *origem*, ao qual associamos o número  $0 \in \mathbb{R}$ , e um ponto  $E_1$ , dito *unidade*, ao qual associamos o número  $1$ . O número  $x_1$  associado a  $P_1$  é chamado de *coordenada* de  $P_1$  e a associação  $x_1 \leftrightarrow P_1$  estabelece uma aplicação bijetiva ou bijeção entre números reais e os pontos de uma reta. Graficamente, tem-se a representação indicada na fig. 2-1.

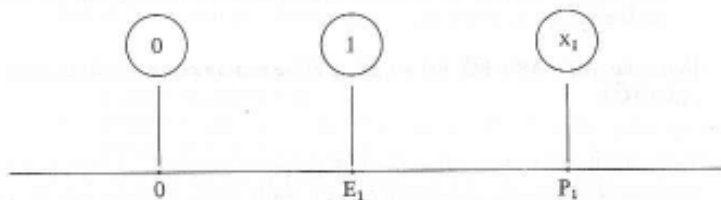


Fig. 2.1

Um par de números reais  $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$  pode ser usado para representar um ponto  $P_2$  em um plano, no qual estabelecemos um sistema de coordenadas retangulares. A associação  $[x_1, x_2] \leftrightarrow P_2$  define uma bijeção entre os pares ordenados de números reais e os pontos de um plano referidos a esse sistema de coordenadas (fig. 2-2). A origem  $O$  terá coordenadas  $[0, 0]$ , ao ponto  $E_1$

Então:

$$U = [x_1, x_2, x_3] \text{ se e só se } -U = [-x_1, -x_2, -x_3].$$

A fig. 2.6 ilustra estes fatos em  $\mathbb{R}^2$ .

Vejamos em seguida como as operações de soma de vetores geométricos e de cálculo do múltiplo escalar de um vetor geométrico se transferem para vetores de coordenadas. Essa transferência é fundamental para tornar algébricas as operações geométricas.

Considere dois vetores  $U = [u_1, u_2, u_3]$  e  $V = [v_1, v_2, v_3]$ . Dado um ponto arbitrário  $A$  do espaço, seja  $\overline{AB}$  a seta representativa de  $U$  e  $\overline{BC}$  a representativa de  $V$ . A seta  $\overline{AC}$  é então a representativa de  $U + V = W$  (fig. 2-7). Seja  $W = [w_1, w_2, w_3]$

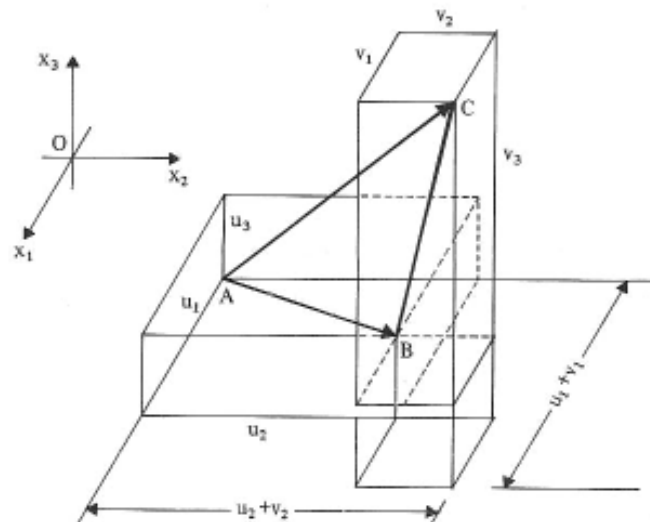


Fig. 2.7

As componentes do vetor  $W$  podem ser determinadas simplesmente a partir das de  $U$  e  $V$ . Sejam  $[x_1, x_2, x_3]$  as coordenadas de  $A$ ,  $[y_1, y_2, y_3]$  as de  $B$  e  $[z_1, z_2, z_3]$  as de  $C$ . Então, para  $i = 1, 2, 3$  tem-se as fórmulas:

$$u_i = y_i - x_i; \quad v_i = z_i - y_i; \quad w_i = z_i - x_i$$

Como  $z_i - x_i = (z_i - y_i) + (y_i - x_i)$  tem-se.

$$w_i = v_i + u_i = u_i + v_i$$

# Conceitos métricos da geometria no plano e no espaço: distância, projeção, ângulo, etc.

## 4. GEOMETRIA EUCLIDIANA NO PLANO E NO ESPAÇO

A palavra “euclidiana” está ligada aos conceitos “métricos” da geometria, tais como distância, perpendicular, ângulo, produto interno etc. Do ponto de vista abstrato da Álgebra Linear, bastaria definir o produto interno algebricamente, estudar as suas propriedades e em seguida definiríamos distância, ângulo, perpendicular etc. Mas, tal como fizemos nas seções precedentes, supomos que tais conceitos já significam alguma coisa para o leitor. Vamos, portanto, aproveitar os seus conhecimentos de geometria e trigonometria elementares para motivar a definição de produto interno. Esperamos porém, que, ao terminar o estudo desta seção, o leitor esteja convencido que o produto interno é o instrumento conveniente para resolver os problemas da geometria euclidiana.

De agora em diante, quando nos referirmos a um vetor de coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  ou em  $\mathbb{R}^3$ , suporemos que os eixos são mutuamente perpendiculares e graduados com a mesma unidade de comprimento.

### 4.1 MÓDULO E DISTÂNCIA

Lembremos que se um vetor  $V$  é representado por uma seta, então o seu módulo  $\|V\|$  é a distância da origem à extremidade da seta. Utilizando pois o teorema de Pitágoras vemos que se  $V = [x_1, x_2]$  é um vetor de  $\mathbb{R}^2$ , então  $\|V\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . (Ver fig. 4-1)

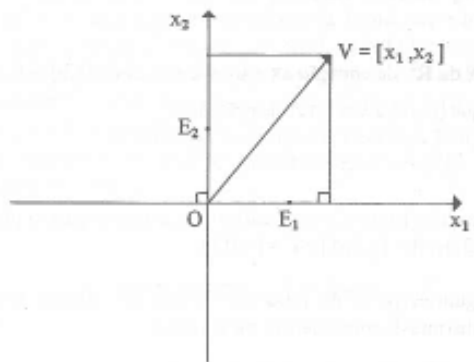


Fig. 4.1

Em  $\mathbb{R}^3$ , o módulo de  $V = [x_1, x_2, x_3]$  é o comprimento da diagonal de um paralelepípedo retângulo de arestas  $|x_1|$ ,  $|x_2|$  e  $|x_3|$ . Portanto,  $\|V\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

### 4.5 PRODUTO MISTO EM $\mathbb{R}^3$

Sejam  $U, V, W$  três vetores não coplanares. Isto significa que as extremidades das setas representativas de  $U, V, W$  partindo da origem não são coplanares com a origem, ou ainda, que nenhum deles está no plano gerado pelos outros dois, isto é,  $U, V$  e  $W$  são linearmente independentes, em  $\mathbb{R}^3$ . Nosso objetivo é calcular o volume do paralelepípedo gerado por  $U, V, W$  (ver fig. 4.20).

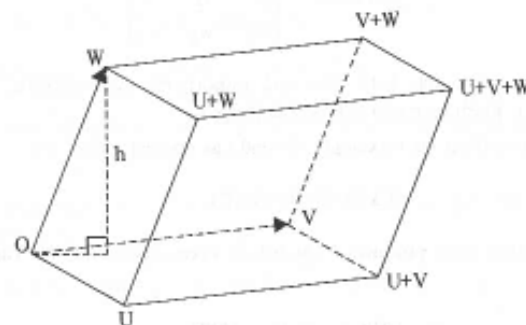


Fig. 4.20

Tomemos como base o paralelogramo  $O, U, U+V, V$ , cuja área é, como sabemos,  $S = \|U \times V\|$ . A altura correspondente  $h$  será a distância da extremidade de  $W$  a este plano, isto é, o valor absoluto da projeção escalar de  $W$  sobre um vetor normal ao plano  $OUV$ . Mas  $U \times V$  é um vetor normal ao plano  $OUV$ . Logo,  $h = |W \cdot \frac{U \times V}{\|U \times V\|}| = \frac{|(U \times V) \cdot W|}{\|U \times V\|}$  (Ver Exemplo 9.)

Portanto, o volume procurado é

$$Sh = \|U \times V\| \frac{|(U \times V) \cdot W|}{\|U \times V\|} = |(U \times V) \cdot W|$$

É geometricamente claro que se  $U, V$  e  $W$  fossem linearmente dependentes, isto é, coplanares, este volume seria zero.

**Definição:** Se  $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ , o número  $(U \times V) \cdot W$  chama-se *produto misto* de  $U, V, W$ .

Da discussão acima, sabemos que:

1.  $(U \times V) \cdot W = 0$  se e só se  $U, V, W$  são linearmente dependentes.
2. Se  $U, V$  e  $W$  são linearmente independentes, então  $|(U \times V) \cdot W|$  é o volume do paralelepípedo gerado por  $U, V, W$ .



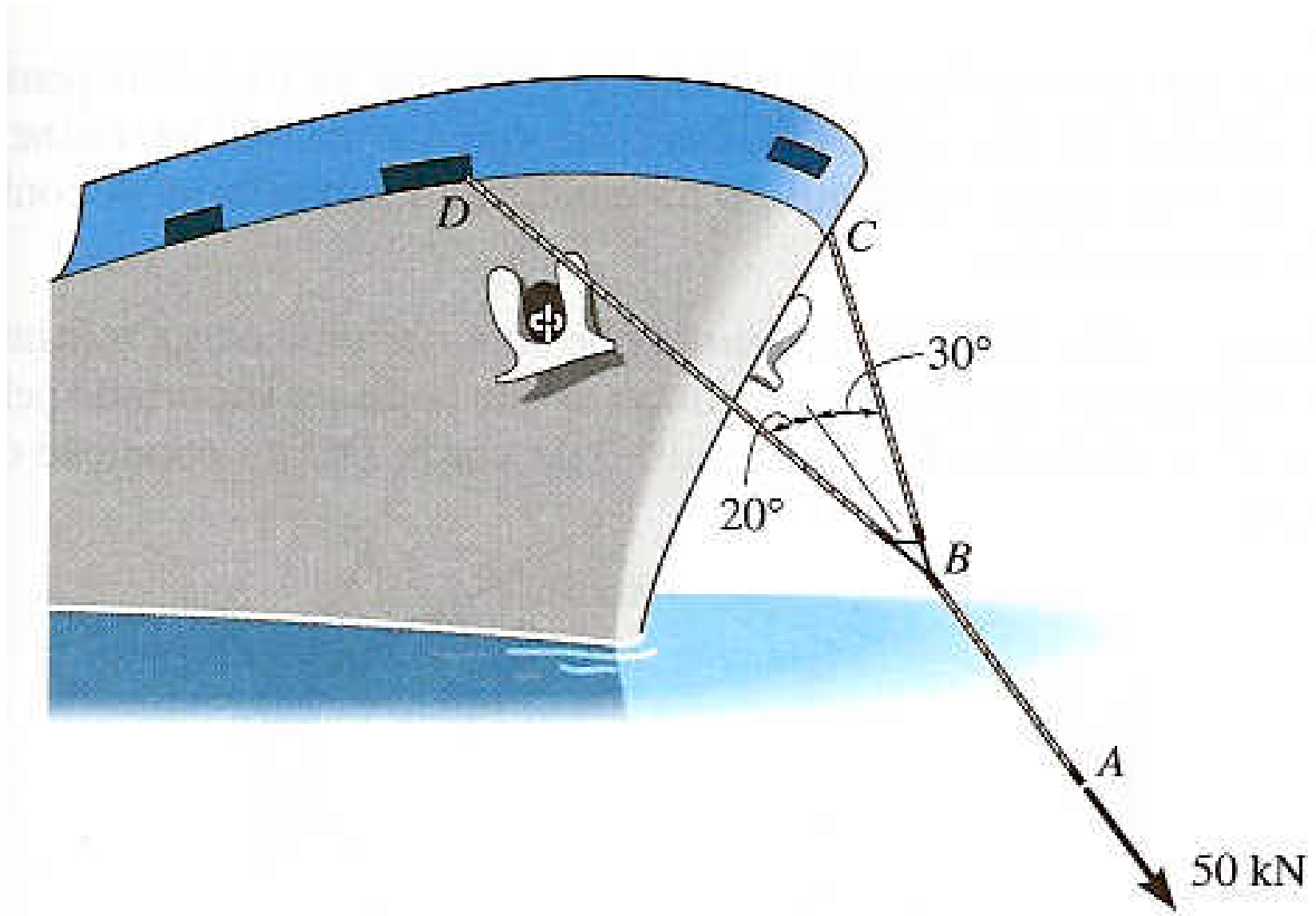








Esquema 3D – tração / navio



**Aplicação:**  
**Terminal oceânico do tipo monobóia / navio aliviador -**  
**foto**



**Aplicação:**

**Terminal oceânico do tipo monobóia / navio aliviador -  
foto**



**Aplicação:**

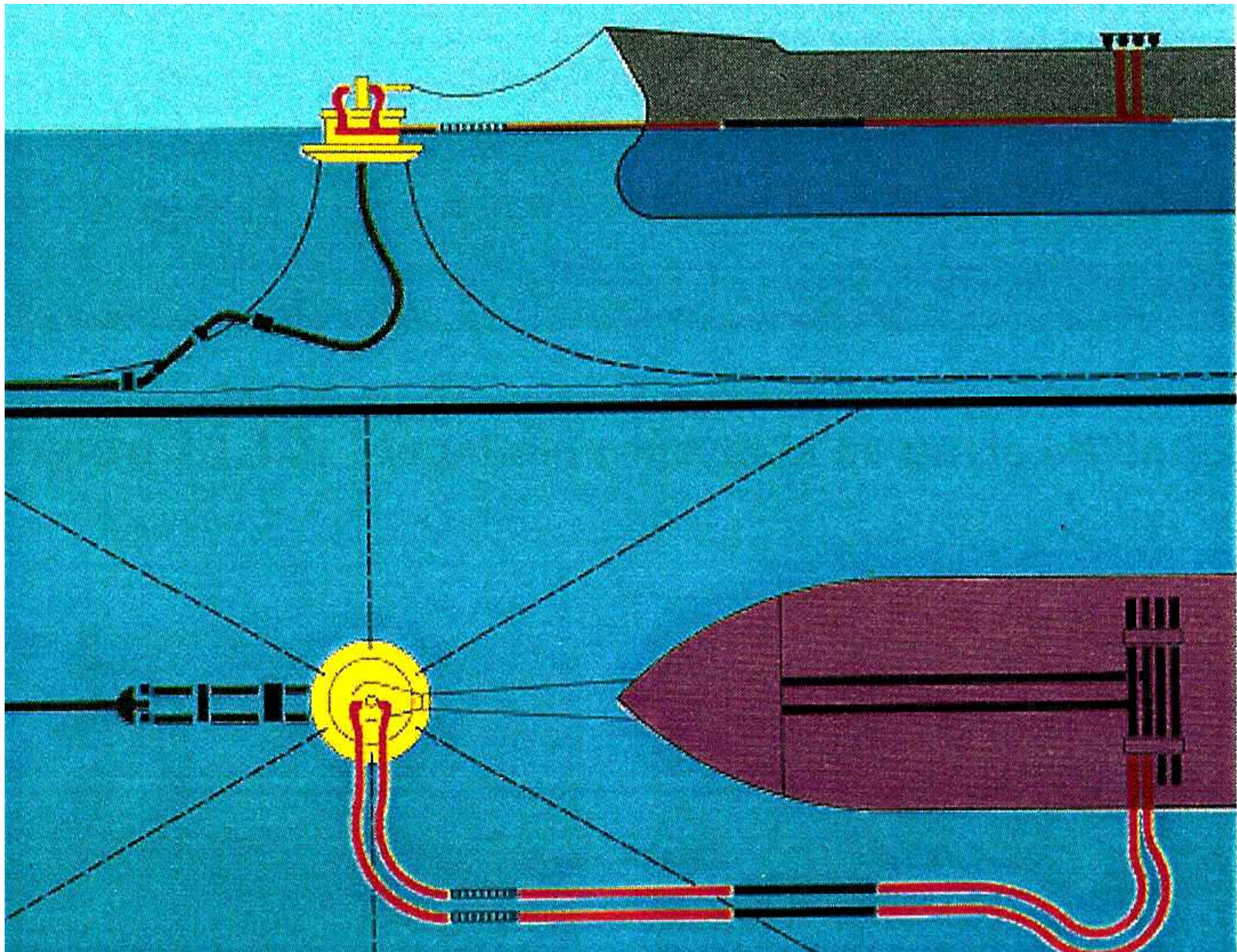
**Terminal oceânico do tipo monobóia / navio aliviador -  
foto**



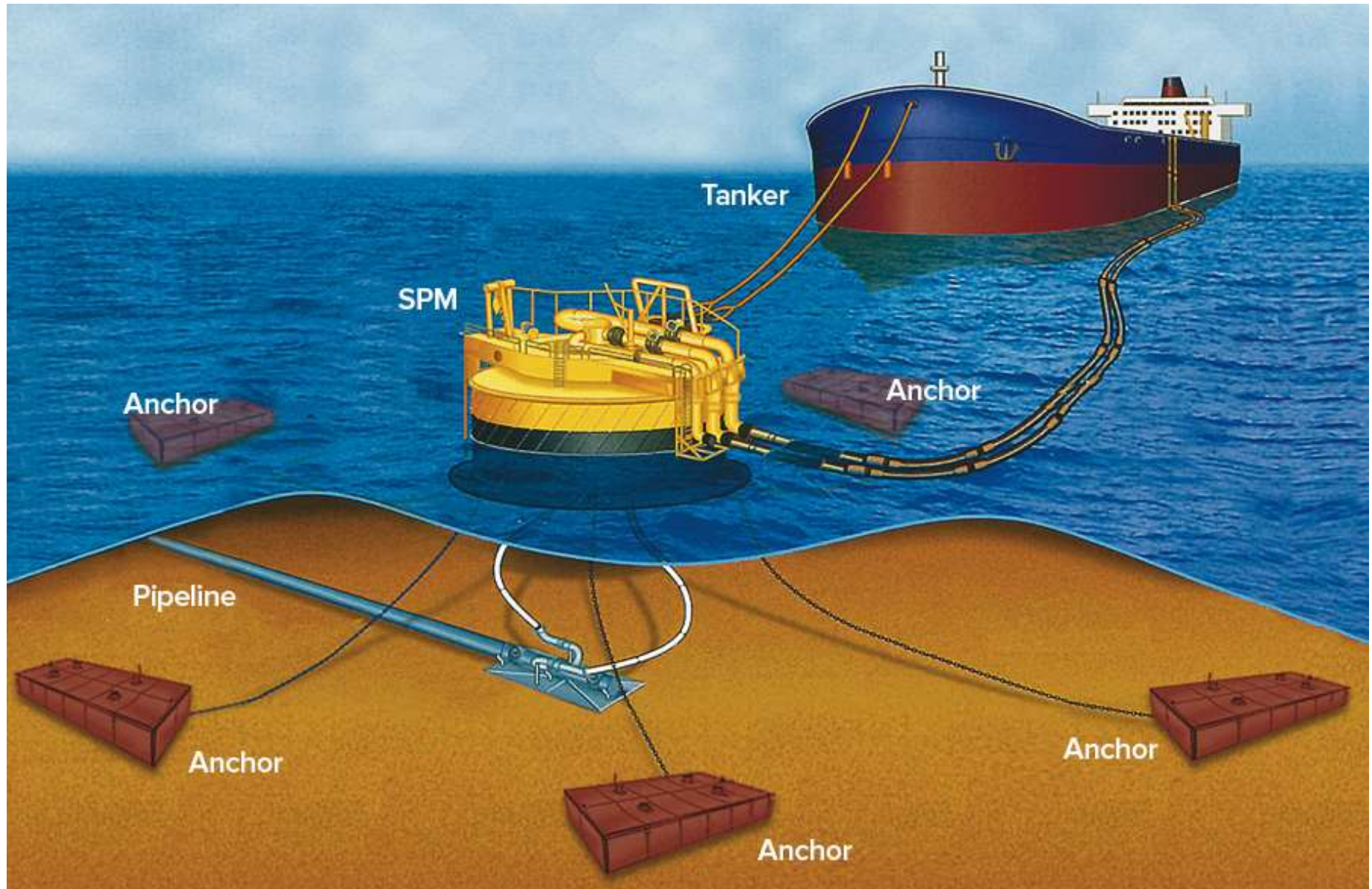
**Aplicação:**

**Terminal oceânico do tipo monobóia / navio aliviador -  
foto**





# Aplicação: Terminal oceânico do tipo monobóia/navio aliviador esquema





# Geometria: retas e planos no $R^3$

Exemplo:  
Ruído equipamento  $\square$   
passadiço

- a) Escreva em termos de  $E_1, E_2$  e  $E_3$  os seguintes vetores:  
 $U - V + W$ ;  $5U + 2V + (-3)W$ ;  $\frac{1}{2}[4U + 6W]$ ;  $3[2U + (-1)V + 5W] - 4[U + 2V + 3W]$
- b) Para cada vetor de a) desenhe uma figura mostrando as setas de origem  $O$  representativas de  $U, V$  e  $W$  e do vetor em questão.

12. Seja  $U = E_1 + E_2 + E_3, V = 2E_1 + 3E_2, W = 3E_1 + 5E_2 - 2E_3$  e  $S = -E_1 + E_3$ . Mostre que os vetores  $U - V$  e  $W - S$  são paralelos.  
 [Sugestão: As setas de  $U - V$  e  $W - S$  emanadas de uma mesma origem devem ser colineares.]
13. Constate graficamente que os vetores  $E_1 - E_2, E_2 - E_3$  e  $E_3 - E_1$  são coplanares.
14. Seja  $G$  o baricentro do triângulo  $ABC$  ( $G$  é o ponto de intersecção das medianas do triângulo). Mostre que  $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$ .

### 3. RETAS E PLANOS

Vimos na seção anterior que se  $[x_1, x_2, x_3]$  são as coordenadas de um ponto  $P$  e se  $U = [x_1, x_2, x_3]$ , então a reta que contém a origem  $O$  e o ponto  $P$ , consiste das extremidades dos vetores  $\lambda U$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de origem comum  $O$ . O segmento  $OP$  em particular consiste das extremidades de todos os vetores  $\lambda U$  para os quais  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Até aqui, fizemos uso do conhecimento intuitivo do leitor relativamente aos conceitos primitivos de ponto, reta e plano da geometria euclidiana. Entretanto, não é suficiente trabalharmos com noções intuitivas pouco precisas, devemos definir os termos usados. Nosso plano de ação e o de utilizar  $\mathbb{R}^n, n \leq 3$ , onde possuímos uma visualização geométrica de pontos e vetores, para introduzir definições plausíveis de pontos, retas e planos. Essas serão expressas ou em termos de vetores geométricos ou de vetores de coordenadas e permitirão ao leitor inferir definições desses elementos para  $n > 3$ .

Como um exemplo simples desse procedimento (chamado "método axiomático"), baseado em nossa experiência com a correspondência biunívoca entre pontos e  $n$ -listas,  $n \leq 3$ , podemos definir um ponto  $P$  em  $\mathbb{R}^n, n \leq 3$ , como sendo uma  $n$ -lista. Assim, um ponto em  $\mathbb{R}^1$  é um número real  $x_1$ , um ponto em  $\mathbb{R}^2$  uma 2-lista  $[x_1, x_2]$  e um ponto em  $\mathbb{R}^3$  uma 3-lista  $[x_1, x_2, x_3]$ . A extensão dessa definição para  $n > 3$  é simples, um ponto em  $\mathbb{R}^n$  é simplesmente uma  $n$ -lista de números reais  $[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$ . Preservando nossa noção de pontos como criaturas passivas meramente fixas

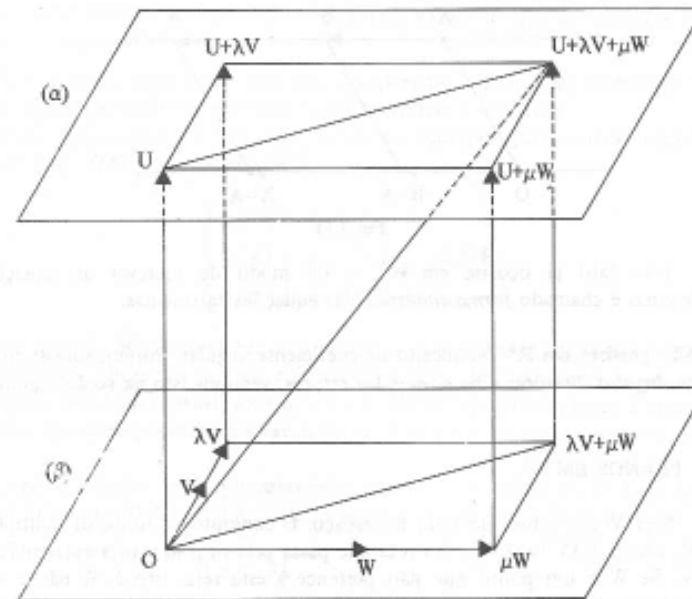


Fig. 3.13

Isto nos conduz a caracterizar um plano em  $\mathbb{R}^3$  como o conjunto  $(\alpha) = [U + \lambda V + \mu W \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}]$ , onde  $V$  e  $W$  não são colineares com a origem, isto é,  $V$  e  $W$  são linearmente independentes, ou ainda,  $V$  não é múltiplo de  $W$  e  $W$  não é múltiplo de  $V$ .

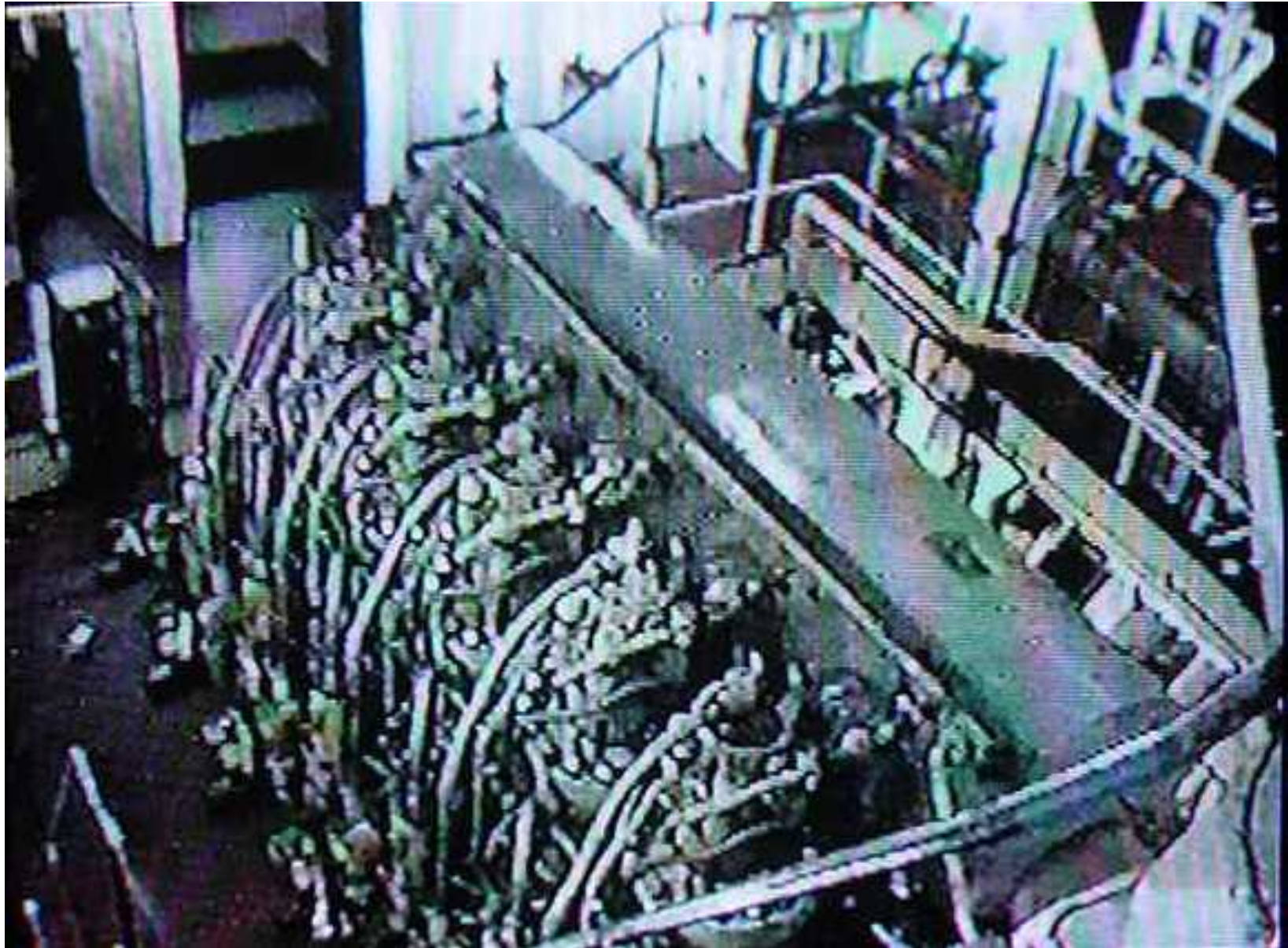
Tal como acontecia com retas, a equação

$$Z(\lambda, \mu) = U + \lambda V + \mu W; \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

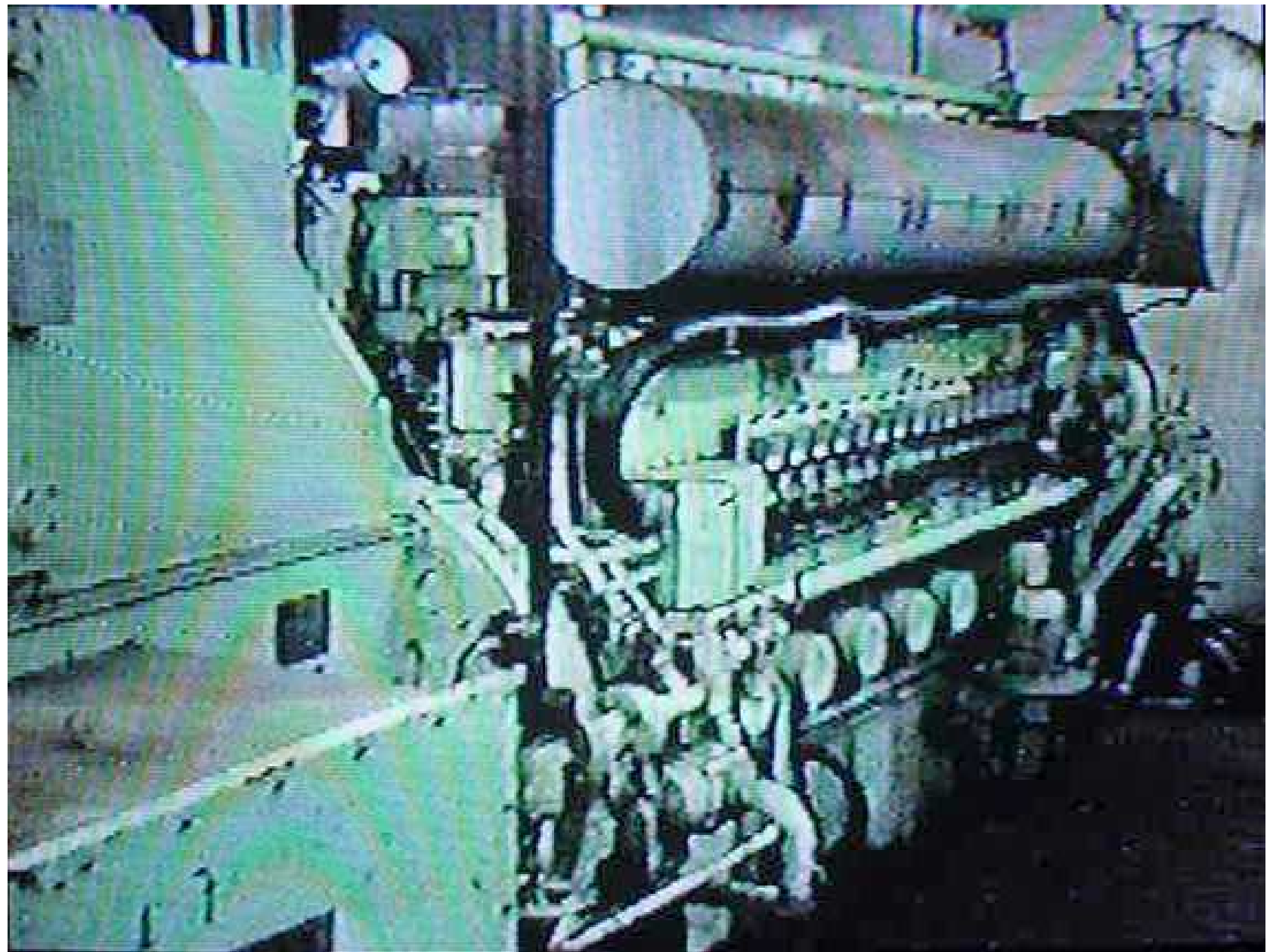
é chamada uma equação paramétrica do plano  $(\alpha)$ , os números  $\lambda$  e  $\mu$  são chamados parâmetros e o par  $\{V, W\}$  é chamado um par de vetores direção de  $(\alpha)$ , o mesmo par servindo para qualquer plano paralelo a  $(\alpha)$ .

É claro que um plano possui uma infinidade de pares de vetores direção. Na realidade, se  $A, B, C$  são três pontos não colineares do plano  $(\alpha)$ , então  $\{B-A, C-A\}$  é um par de vetores direção de  $(\alpha)$ , como mostra a fig. 3.14, comparada com a fig. 3.13.

Neste caso, a equação paramétrica de  $(\alpha)$  é  $Z(\lambda, \mu) = A + \lambda(B-A) + \mu(C-A); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .











Receptor de ruído - passadiço

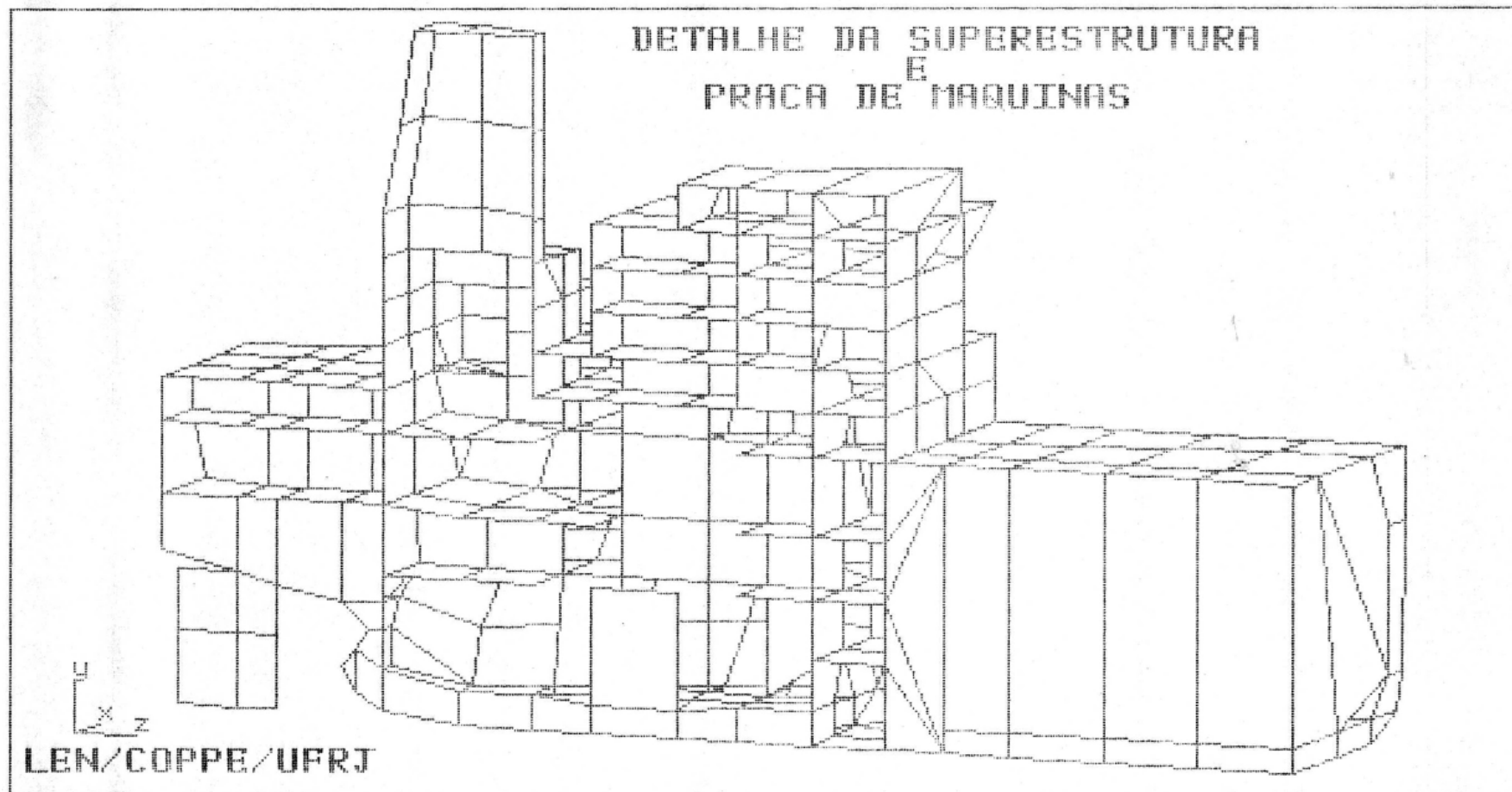




Receptor de ruído - asa do passadiço BE



## Caminho de transmissão de ruído - retas / planos



# Sistemas de equações lineares e matrizes

Exemplo:

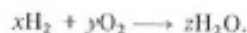
Reações nos mancais da linha de eixo propulsor



# SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

## 2.1 INTRODUÇÃO

Na natureza, as coisas estão sempre mudando, se transformando, e o ser humano, para garantir sua sobrevivência e melhorar sua existência, precisa conhecer e dominar estes processos de mudança. Um dos métodos encontrados para se descrever estas transformações foi o de procurar nestas o que permanece constante durante a mudança. Por exemplo, sabemos que o hidrogênio ( $H_2$ ) reage com o oxigênio ( $O_2$ ) para produzir água ( $H_2O$ ). Mas, quanto de hidrogênio e de oxigênio precisamos? Esta é uma mudança que podemos descrever do seguinte modo:  $x$  moléculas de  $H_2$  reagem com  $y$  moléculas de  $O_2$  produzindo  $z$  moléculas de  $H_2O$ , ou esquematicamente:



O que permanece constante nessa mudança? Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento, no fim da reação. Assim, para o hidrogênio devemos ter  $2x = 2z$ , e para o oxigênio,  $2y = z$ . Portanto, as nossas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

2º *Passo*: Tornamos o coeficiente de  $x_2$  da equação (2') igual a 1. Para isto, multiplicamos a equação (2') por  $-1/3$ . O sistema resultante é:

$$(III) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2'') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'') \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

3º *Passo*: Eliminamos  $x_2$  das equações (1'') e (3''). Para isto, multiplicamos a equação (2'') por  $-4$  e somamos a esta a equação (1''), obtendo (1'''). De maneira análoga obtemos (3'''), multiplicando a equação (2'') por  $7$  e somando a esta nova equação a equação (3'').

$$(IV) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2''') \\ 0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (3''') \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

4º *Passo*: Tornamos o coeficiente de  $x_3$  na equação (3''') igual a 1. Para isto, multiplicamos a equação (3''') por  $-3$ . Isto resulta no seguinte sistema:

$$(V) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1^{iv}) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2^{iv}) \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & (3^{iv}) \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5º *Passo*: Eliminamos  $x_3$  das duas primeiras equações do sistema V. Multiplicamos a equação (3<sup>iv</sup>) por  $-1/3$  e somamos a esta nova equação a equação (1<sup>iv</sup>). De modo análogo, multiplicamos a equação (3<sup>iv</sup>) por  $-2/3$  e a esta nova equação somamos a equação (2<sup>iv</sup>). Sistema resultante:

$$(IV) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 & \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 & \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

# Matrizes



## MATRIZES

### 1.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos sobre matrizes. Estes conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais, não apenas porque eles “ordenam e simplificam” o problema, mas também porque fornecem novos métodos de resolução.

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela:

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

1.2.9 Matriz Simétrica é aquela onde  $m = n$  e  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

Observe que, no caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma “reflexão” da parte inferior, em relação à diagonal.

### 1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as tabelas, que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos.

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o primeiro ano				
	soja	feijão	arroz	milho
Região A	3000	200	400	600
Região B	700	350	700	100
Região C	1000	100	500	800

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o segundo ano				
	soja	feijão	arroz	milho
Região A	5000	50	200	0
Região B	2000	100	300	300
Região C	2000	100	600	600

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produto e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores:

# Determinantes



## DETERMINANTE E MATRIZ INVERSA

### 3.1 INTRODUÇÃO

Já em 250 A.C. havia exemplos da resolução de sistemas de equações através de matrizes, no livro chinês *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, cujo autor é desconhecido. Também algumas noções ligadas a determinantes, o assunto que será objeto de estudo neste Capítulo, já eram conhecidas na China antiga.

Mas, se por um lado já se utilizava a noção de determinantes no mundo Oriental há tanto tempo, no Ocidente este assunto começou a ser tratado esporadicamente a partir do século XVII. Nesta época surgem trabalhos de G. W. Leibniz (1646–1716), de G. Cramer (1704–1752) que desenvolveu um método de resolução de sistemas através de determinantes, conhecido por “Regra de Cramer” e foi publicado em 1750 (provavelmente já conhecido por C. Maclaurin (1698–1746) em 1729, e alguns resultados simétricos de J. L. Lagrange (1736–1813).

Só no século XIX é que os determinantes passaram a ser estudados mais sistematicamente, a começar pelo longo tratado de A. L. Cauchy (1789–1857) em 1812, tendo sido realizados, em seguida, trabalhos de C. G. Jacobi (1804–1851).

$$vi) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para mostrar esta propriedade, usamos a definição de determinante e a distributividade. Mas cuidado! Observe que aqui temos a soma numa linha, e não uma soma de matrizes. De um modo geral, o determinante de uma soma de duas matrizes não é igual à soma dos determinantes das matrizes. Ou seja,  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ . Veja o Exercício 4 da seção 3.10.

vii) O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

Exemplo: 
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aqui, à terceira linha, somamos a primeira linha multiplicada por 2. Para provar esta propriedade usamos as propriedades (vi), (iii) e (v).

viii)  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Mostre, inicialmente, esta propriedade para matrizes  $2 \times 2$ . Sinta a dificuldade que se teria para demonstrá-la já em matrizes  $3 \times 3$ . A demonstração deste resultado para matrizes  $n \times n$  é bem mais elaborada, mas você terá condições de fazê-la usando matrizes elementares (veja a seção 3.8).

A próxima propriedade é tão importante e útil no cálculo de um determinante que destacamos sua importância apresentando-a numa seção separada.

### 3.4 DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

Na seção 3.2 vimos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

### 3.6 REGRA DE CRAMER

O cálculo da inversa de uma matriz fornece um outro método de resolução de sistemas lineares de equações. Este só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Suponhamos que desejássemos resolver o sistema linear de  $n$ -equações e  $n$ -incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou

$$A \cdot X = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes e}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos termos independentes, e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a matriz das incógnitas. Para esta equação suponhamos que  $\det A \neq 0$  e portanto, que  $A$  tenha a inversa  $A^{-1}$ . Então

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Usando a relação para matriz inversa dada em 3.5.4, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1 \Delta_{11} + \dots + b_n \Delta_{n1}}{\det A}$$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obtemos de  $A$ , substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. De fato, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \Delta_{11} + \dots + b_n \Delta_{n1}$$

Ou seja

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes ( $\det A \neq 0$ ), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de  $A$ ,







# Linha de eixo propulsor - escora



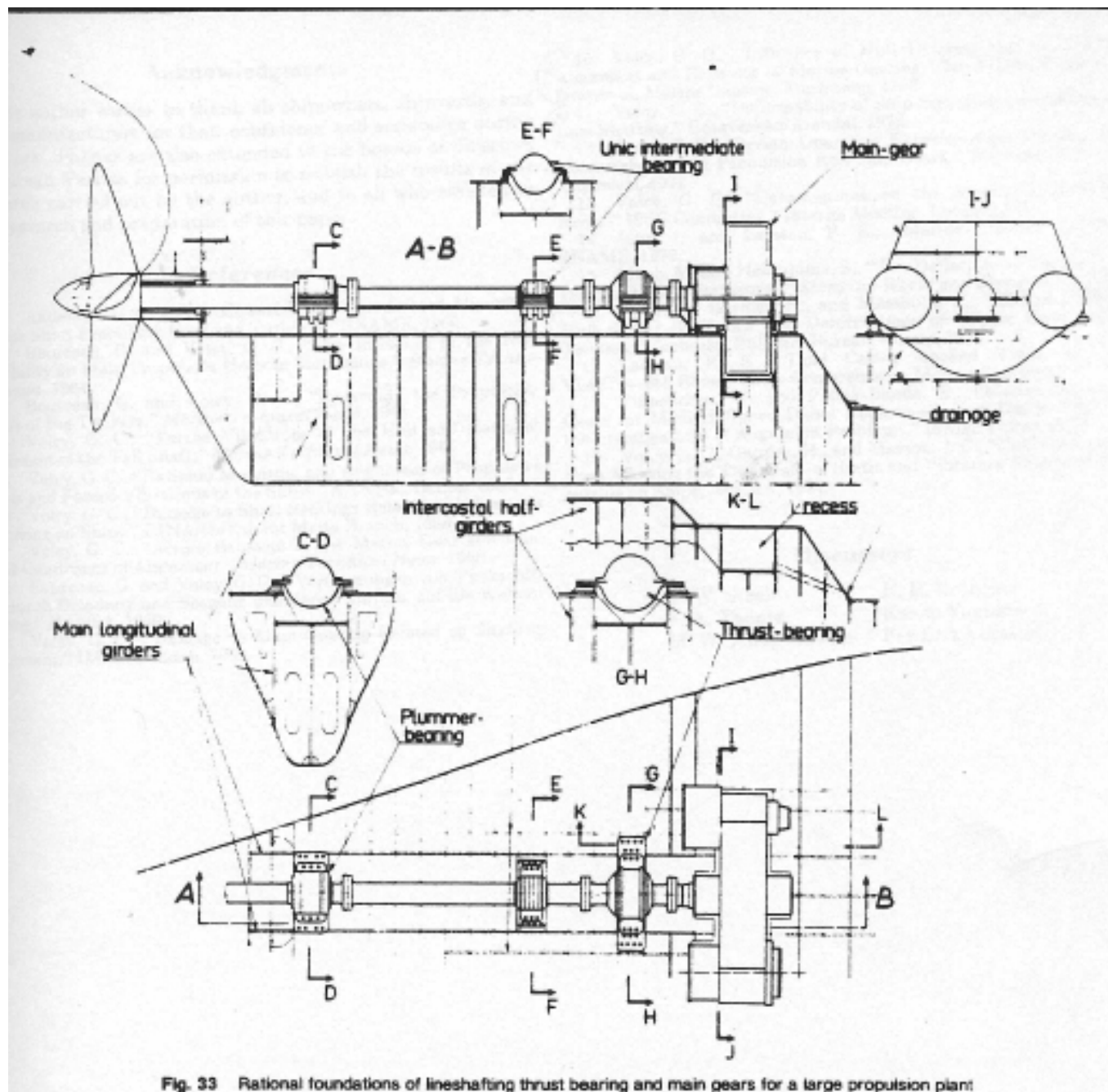
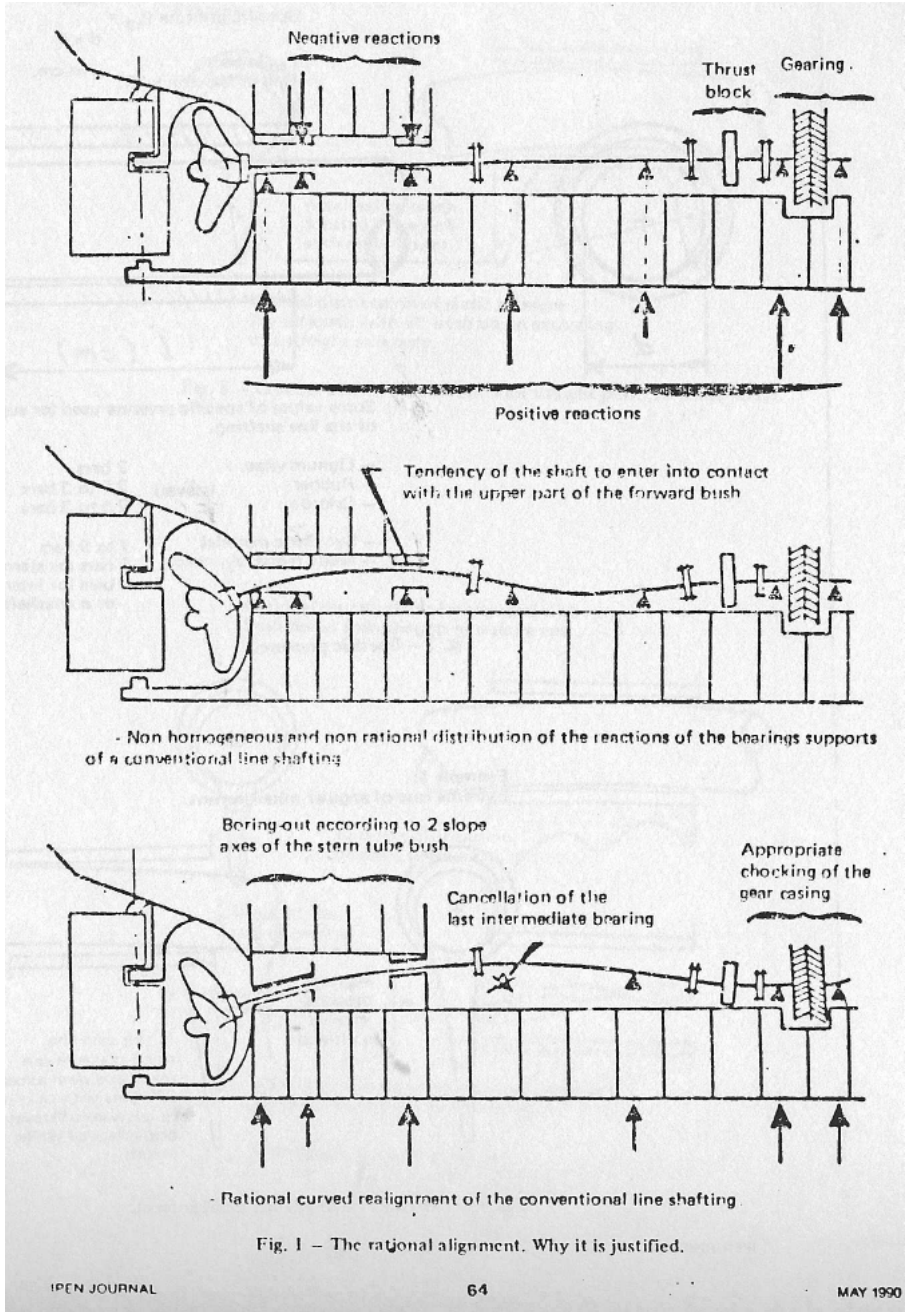


Fig. 33 Rational foundations of lineshafting thrust bearing and main gears for a large propulsion plant



# Espaços Vetoriais

Exemplo:

Deformação de pilares  
das plataformas dos MCAs

# Espaço vetorial

# 4

## ESPAÇO VETORIAL

### 4.1 VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

Imagine uma força atuando sobre um corpo. Você conseguirá precisá-la determinando sua intensidade e direção. Força é um exemplo típico de grandeza que será representada por um vetor. Outros exemplos são velocidade e deslocamento. Neste capítulo desenvolveremos o conceito de vetor de uma forma bem ampla, de modo que, por exemplo, soluções de sistemas de equações lineares ou de equações diferenciais também possam ser representadas por vetores.

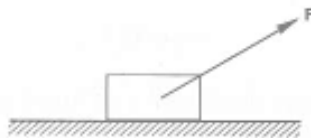


Figura 4.1.1

$$\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, é um subespaço de dimensão 1. Observe ainda que o grau de liberdade do sistema é 1. Faça o Exercício 21b e c da seção 4.8.

### 4.7 MUDANÇA DE BASE

Você já deve ter visto uma situação em que a resolução de um problema de Física (de cinemática ou estática, por exemplo) torna-se muito mais simples se for escolhido um referencial conveniente para descrever o movimento. Por exemplo, num problema em que um corpo se move no plano  $xy$ , cuja trajetória é uma elipse de equação  $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$  (veja a Figura 4.7.1), a descrição do movimento torna-se muito simplificada se ao invés de trabalharmos com os eixos  $x$  e  $y$  (isto é, o referencial determinado pela base formada por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ ), utilizamos um referencial que se apóia nos eixos principais da elipse.

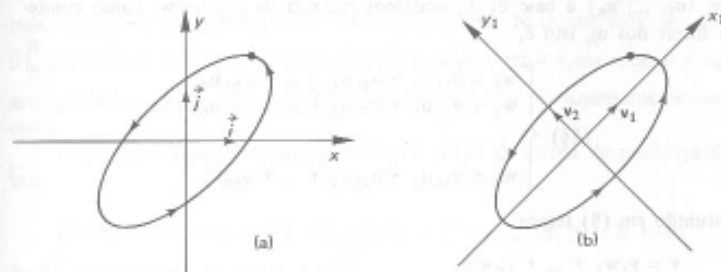


Figura 4.7.1

Neste novo referencial, a equação da trajetória será mais simples:

$$3x_1^2 + 2y_1^2 = 6$$

(Depois você verá, no Capítulo 11, como foi encontrada esta equação.)

Numa situação desse tipo, temos duas questões a resolver:

- 1) Como escolher o novo referencial?
- 2) Uma vez escolhido, qual a relação entre as coordenadas de um ponto no antigo referencial e suas coordenadas no novo?

$W_1$  e  $W_2$  são retas que passam pela origem. Então,  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$  e  $W_1 \cup W_2$  é o "feixe" formado pelas duas retas, que não é subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ . De fato, se somarmos os dois vetores  $u$  e  $v$ , pertencentes a  $W_1 \cup W_2$ , vemos que  $u + v$  está no plano que contém  $W_1$  e  $W_2$  mas  $u + v \notin W_1 \cup W_2$ .

Assim,  $W_1 \cup W_2$  não é subespaço de  $V$ . Entretanto, podemos construir um conjunto  $W$ , que contém  $W_1$  e  $W_2$  e é subespaço de  $V$ .  $W$  será formado por todos os vetores de  $V$  que forem a soma de vetores de  $W_1$  com vetores de  $W_2$ .  $W = W_1 + W_2$  será chamado "soma de  $W_1$  e  $W_2$ ". Será conveniente colocarmos esta afirmação de forma mais precisa.

**4.3.5 Teorema: (Soma de subespaços):** Sejam  $W_1$  e  $W_2$  subespaços de um espaço vetorial  $V$ . Então, o conjunto

$W_1 + W_2 = \{v \in V; v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$  é subespaço de  $V$ .

*Prova:* (Veja o Exercício 23 da seção 4.8.)

#### 4.3.6 Exemplos

*Exemplo 4:* No exemplo anterior,  $W = W_1 + W_2$  é o plano que contém as duas retas.

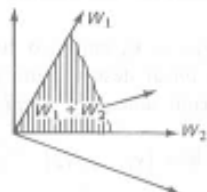


Figura 4.3.7

*Exemplo 5:* Se  $W_1 \subset \mathbb{R}^3$  é um plano e  $W_2$  é uma reta contida neste plano, ambos passando pela origem,  $W_1 + W_2 = W_1$ .

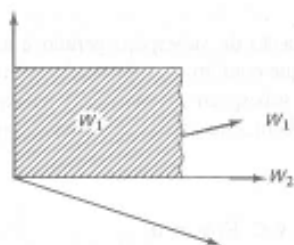
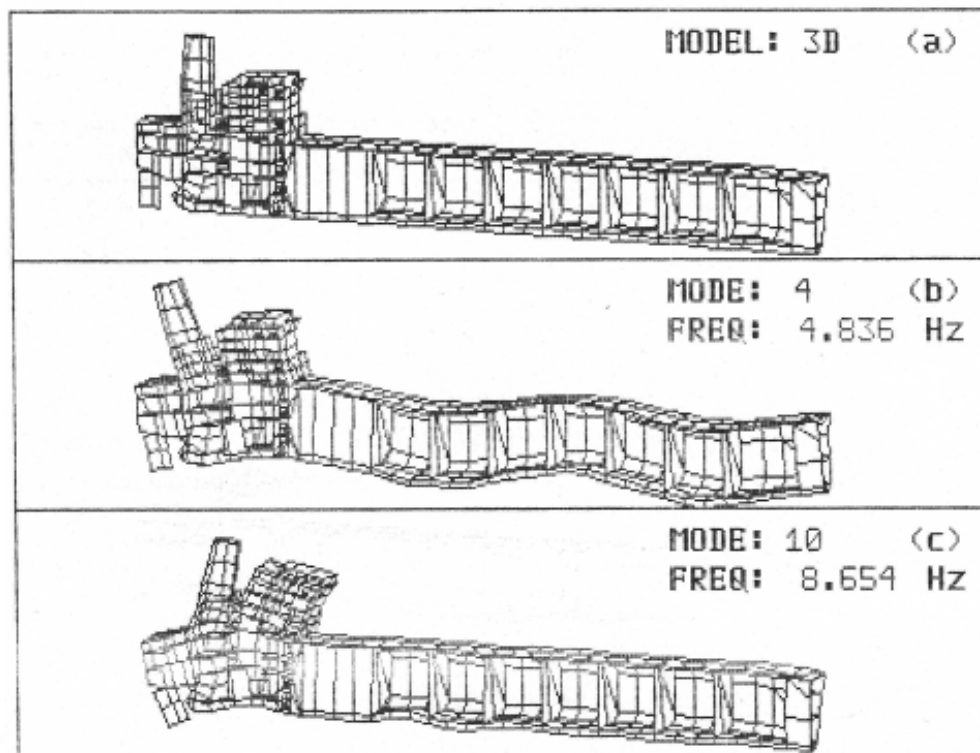


Figura 4.3.8

## Espaço/Subespaço/Vetor n-dimensional Combinação Linear

## Dependência e independência linear

## Autovalores e autovetores









# Transformações Lineares

Exemplo:

Localização de iceberg ou entrada  
de dique (3D - 2 telas planas)

# Transformações Lineares



## TRANSFORMAÇÕES LINEARES

### 5.1 INTRODUÇÃO

Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis. Muitos problemas podem ser representados por tais funções. Por exemplo: Se de um quilograma de soja, são extraídos 0,2 litros de óleo, de uma produção de  $x$  kg de soja, seriam extraídos  $0,2x$  litros de óleo. Escrevendo na forma de função, teremos

$$Q(s) = 0,2s,$$

onde  $Q$  = quantidade em litros de óleo de soja e  $s$  = quantidade em kg de soja. Estes dados podem ser colocados graficamente:

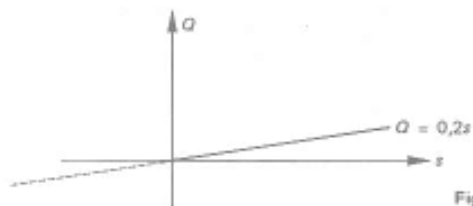


Figura 5.1.1

Das propriedades de operações de matrizes:

$$L_A(u + v) = A(u + v) = Au + Av = L_A(u) + L_A(v) \quad \text{e} \quad L_A(ku) = A(ku) = k(Au) = kL_A(u), \text{ e portanto } L_A \text{ é uma transformação linear.}$$

Como caso particular suponhamos que  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

$$L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Então  $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$ .

Surpresa! Esta é a aplicação linear do Exemplo 4.

Seria interessante que você também notasse o relacionamento que existe entre o Exemplo 1, e o Exemplo 7.

### 5.2 TRANSFORMAÇÕES DO PLANO NO PLANO

Agora iremos apresentar uma visão geométrica das transformações lineares, dando alguns exemplos de transformações do plano ( $\mathbb{R}^2$ ) no plano. Você verá assim, que, por exemplo uma expansão, uma rotação e certas deformações podem ser descritas por transformações lineares.

#### 5.2.1 Expansão (ou Contração) Uniforme:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \alpha \cdot v$$

Por exemplo:  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$v \mapsto 2v, \text{ ou } T(x, y) = 2(x, y)$$

Esta função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de  $v$ , mas de módulo maior.

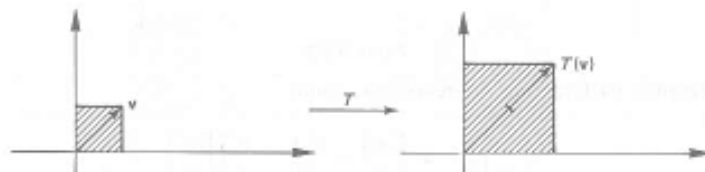


Figura 5.2.1

# Transformações de expansão e cisalhamento / mudança de base / matriz de transformação linear

5.4.6 Teorema: Sejam  $T_1: V \rightarrow W$  e  $T_2: W \rightarrow U$  transformações lineares e  $\alpha, \beta, \gamma$  bases de  $V, W$  e  $U$  respectivamente. Então a composta de  $T_1$  com  $T_2$ ,  $T_2 \circ T_1: V \rightarrow U$ , é linear e

$$[T_2 \circ T_1]_{\gamma}^{\alpha} = [T_2]_{\gamma}^{\beta} \cdot [T_1]_{\beta}^{\alpha}$$

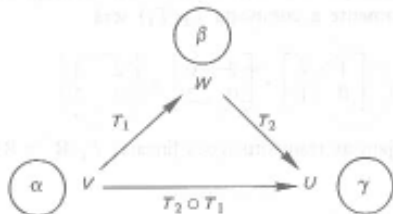


Figura 5.4.4

A demonstração desse teorema é direta mas bastante trabalhosa. Por esta razão não a faremos aqui, indicando apenas suas etapas. Podemos efetua-la simplesmente lembrando a construção das matrizes das transformações  $T_1$  e  $T_2$ , obtendo desta forma suas atuações sobre as bases respectivas. A seguir, por composição achamos o que  $T_2 \circ T_1$  faz na base de  $V$ , e chegamos então à matriz  $[T_2 \circ T_1]_{\gamma}^{\alpha}$ , observando que esta é exatamente o produto das matrizes anteriores.

### 5.4.7 Exemplos

Exemplo 1: Consideremos uma expansão do plano  $\mathbb{R}^2$  dada por  $T_1(x, y) = 2(x, y)$ , e um cisalhamento dado por  $T_2(x, y) = (x + 2y, y)$ . Ao efetuarmos primeiro a expansão e depois o cisalhamento, teremos a seqüência

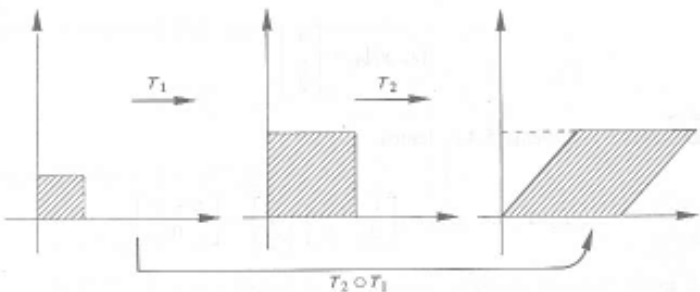


Figura 5.4.5

### 5.4.10 Corolário:

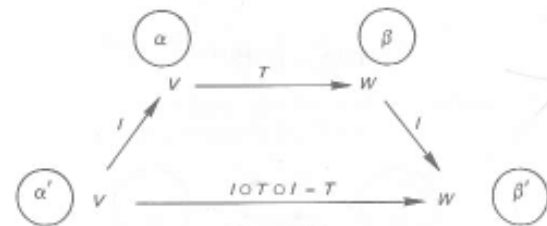


Figura 5.4.7

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\alpha'}$$

Em palavras, conhecendo a matriz de uma transformação linear em relação a certas bases  $\alpha$  e  $\beta$  e as matrizes de mudança de base para novas bases  $\alpha'$  e  $\beta'$ , podemos achar a matriz da mesma transformação linear, desta vez em relação às novas bases  $\alpha'$  e  $\beta'$ .

Como caso particular da situação anterior temos:

Se  $T: V \rightarrow V$  é uma transformação linear e  $\alpha$  e  $\beta$  são bases de  $V$ , então

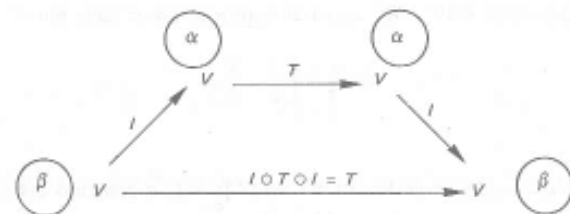


Figura 5.4.8

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I \circ T \circ I]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha} [T]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\alpha}^{\beta}$$

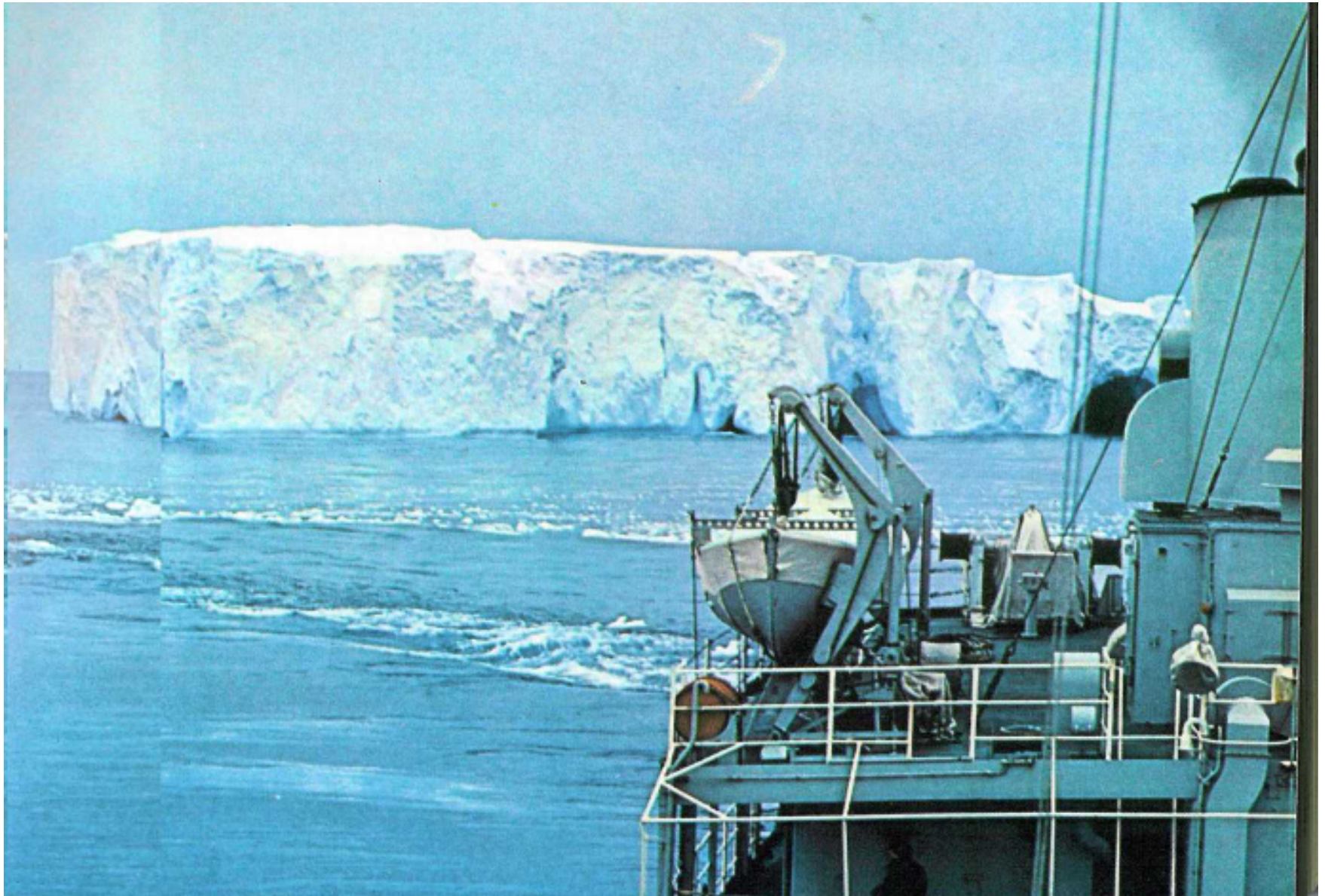
Lembrando que  $[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$  e chamando  $[I]_{\beta}^{\alpha} = A$ , vem que

$$[T]_{\beta}^{\beta} = A \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot A^{-1}$$

Dizemos neste caso que as matrizes  $[T]_{\alpha}^{\alpha}$  e  $[T]_{\beta}^{\beta}$  são semelhantes.

Pelo corolário anterior, observamos através de mudanças convenientes de bases qual a modificação que a matriz de uma transformação linear sofre.

Aplicação: localização de iceberg (3D-2 telas planas)





Aplicação: localização de entrada de dique (3D-2 telas planas)





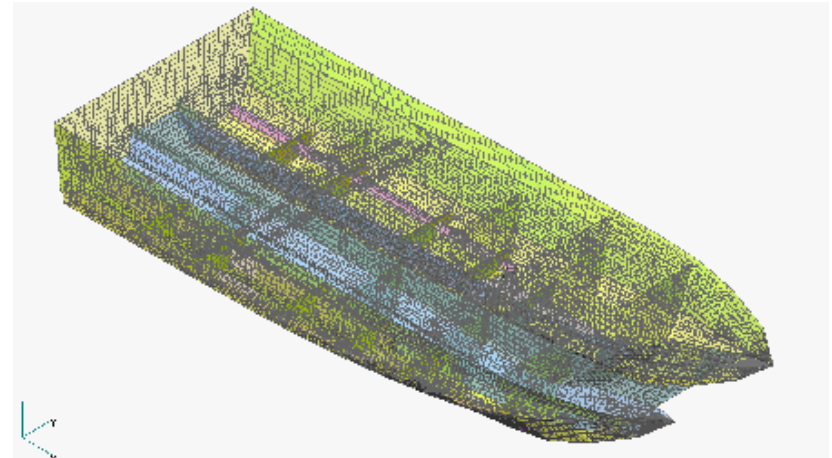
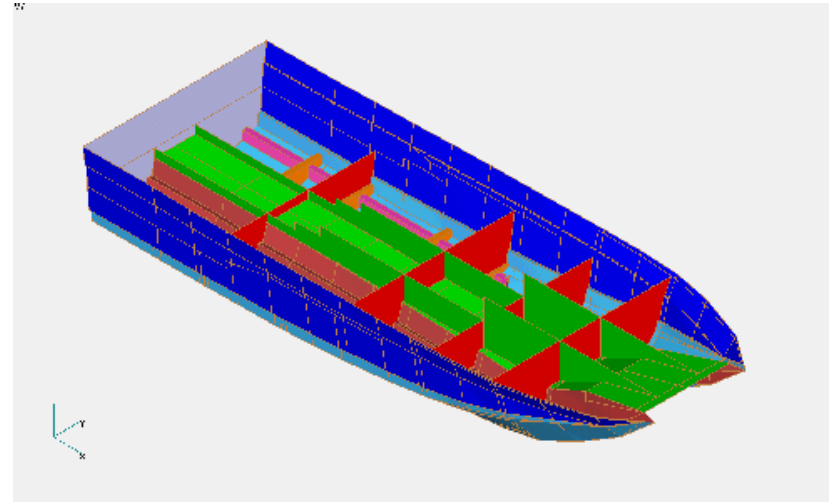
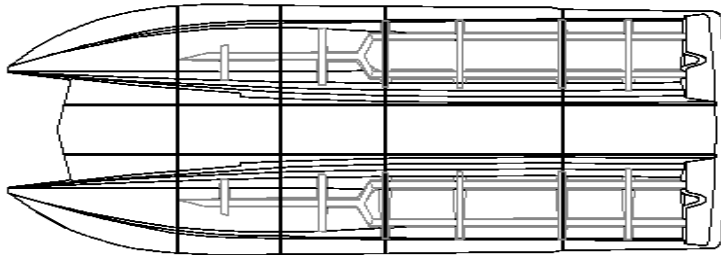
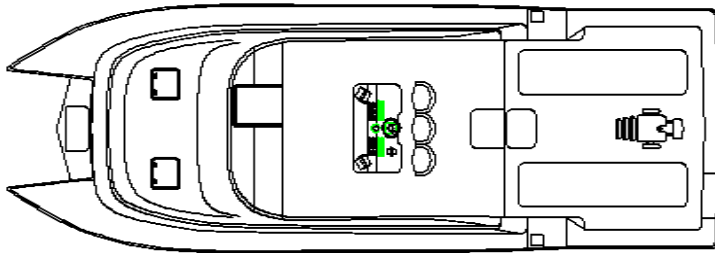
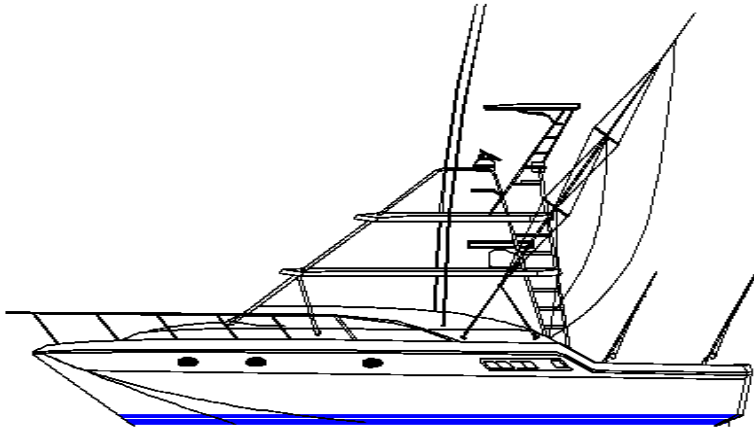


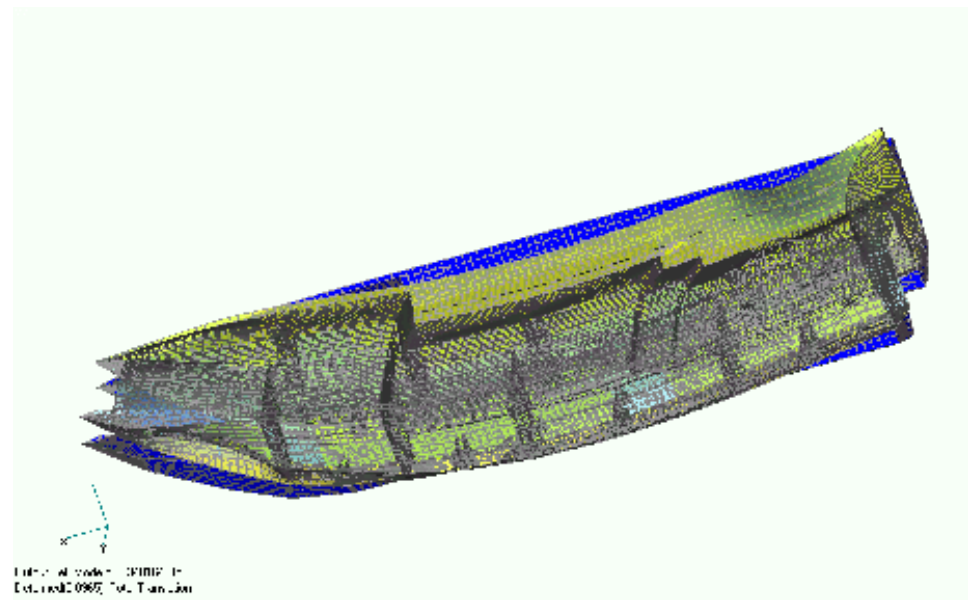
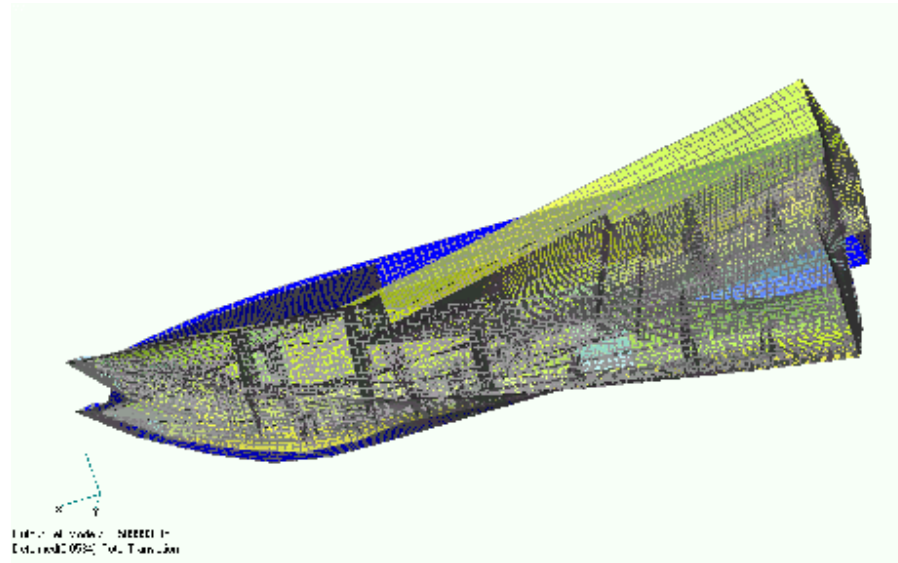


# Autovalores e autovetores

Exemplo:  
Vibração livre de um  
catamarã

# Aplicação: vibração livre de um catamarã - modelo





# Cálculos I a IV

- FUNÇÕES, LIMITES E CONTINUIDADE

Motivação:

Visualização do comportamento, no tempo ou no espaço de grandezas físicas associadas à mecânica, calor, eletricidade, óptica e acústica, com variação linear, polinomial, exponencial, logarítmica e trigonométrica, com destaque em pontos de singularidade e comportamentos assintóticos de funções.

Aplicação:

Representação da forma geométrica do casco de um navio. Variação de torque e potência de um motor com sua rotação. Amplitude de vibração do eixo propulsor na rotação crítica.

# Cálculos I a IV

## - CÁLCULO E APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

### Motivação:

Determinação e visualização de taxas de variação de quantidades da física no tempo e no espaço, como velocidade instantânea e aceleração e direção de vetores tangentes a curvas. Determinação de máximos, mínimos e mudanças de curvatura.

### Aplicação:

Cálculo de acelerações em lançamentos. Determinação de ângulos no posicionamento global de navios. Visualização de carga distribuída, esforços cortantes e momentos fletores em linhas de eixo de navios. Momento restaurador máximo em estabilidade transversal de navios.

# Cálculos I a IV

## - INTEGRAL DEFINIDA E APLICAÇÕES

### Motivação:

Compreensão do conceito de acúmulo de quantidades físicas e geométricas, como momentos, trabalho, áreas e volumes e determinação de pontos de aplicação de resultantes de forças, centros de massa comprimentos de arcos.

### Aplicação:

Trabalho e Potência em máquinas. Centros de massa de estruturas. Comprimento de arco de curvas planas para determinação de peso.

# Cálculos I a IV

## - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

### Motivação:

Determinação de integrais de funções que representam comportamento físico complexo no tempo ou espaço, através de técnicas mais sofisticadas.

### Aplicação:

Reações químicas na combustão em motores. Volume de tanques de lastro e combustíveis. Forças devidas à pressão em superfícies do casco.



# Cálculos I a IV

Coordenadas polares / Seções cônicas  
 Vetores no plano e equações paramétricas  
 Vetores no espaço 3D e geometria analítica sólida

- *Aplicações: Representação matemática de volumes a bordo do navio, como compartimentos e tanques de carga, lastro e consumíveis.*

Cálculo diferencial de funções de várias variáveis  
 Integração múltipla  
 Séries infinitas  
 Equações diferenciais

- *Aplicações: Cálculo de posicionamento do casco durante manobras, a partir de equações no tempo e espaço.*

# Probabilidade e Estatística

- Aplicações:

Cálculo de probabilidades e tendências de parâmetros em manutenção de máquinas, a partir de uma massa de dados obtidos a bordo, como pressão e temperatura.

# Cálculo Numérico

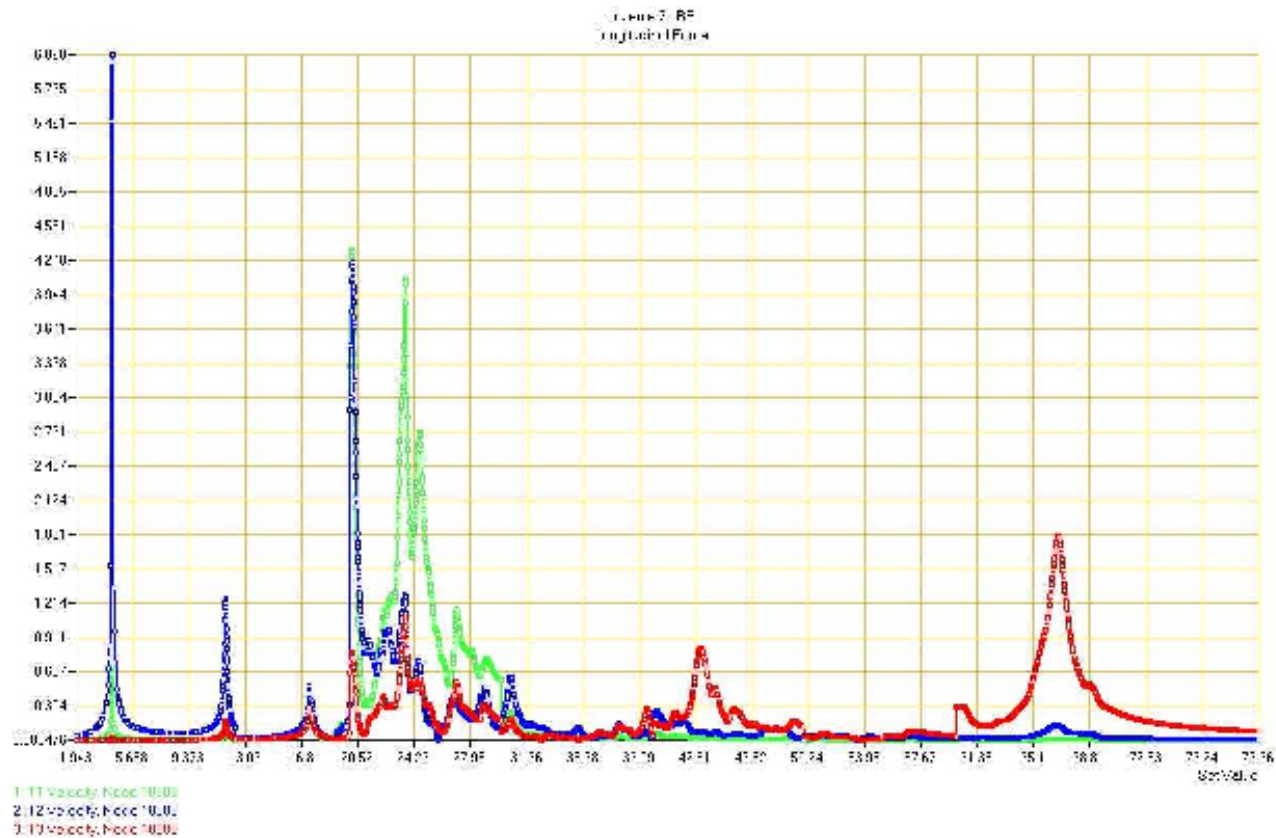
- Aplicações:

Determinação numérica de velocidades do casco, ajuste de curvas de torque e potência de motores e cálculo de áreas e volumes imersos a partir de tabelas de dados.

# Cálculo Numérico

- Aplicação:

Análise de vibração: Transformada Rápida de Fourier



# Comentários finais

- Necessidade: Carl Gustav Jung
  - Quem olha para fora sonha, quem olha para dentro desperta
- Seqüência: Dr. Rinaldo de Lamare
  - A vida do bebê por idade e não por assunto
- Simplicidade: Leonhard Euler
  - A simplicidade não é espontânea, precisa ser criada
- Meta: Sigmund Freud
  - Recordar, Repetir, Elaborar
- Implementação: Albert Einstein
  - 10% de inspiração & 90% de transpiração
- Indicadores
  - Qualidade das perguntas e não das respostas
- Viabilidade
  - Trabalho em equipe (IM&EP)
- Sugestão
  - Destaque para a mente sem tomar lugar do coração
  - Ambos constituem a alma
- Reflexão: Isaac Asimov
  - Salve seu Legado

# Matemática e Engenharia

## *Teoria e Aplicações*

Escola Politécnica – UFRJ

*Prof. Severino Fonseca da Silva Neto, D.Sc.*

Departamento de Engenharia Naval e Oceânica

<http://severinoufrj.blogspot.com>

severino@poli.ufrj.br